التحضير المتواصل لبكالوريا 2010

الموضوع : الدالة اللوغاريتمية

تمرين 01 :

I) بسط العبارات التالية :

$A = e^{ln2} + e^{ln3}$ ، $B = e^{\frac{1}{2}ln16}$

$C = lne^{-3} + e^{ln5}$ ، $D = e^{-ln\frac{3}{2}} + e^{ln\frac{1}{3}}$

II) بين صحة المساواة في كل حالة :

1) $e^{lnx} - ln(2e^x) - ln\frac{1}{2} = 0$

2) $e^{lnx} - ln(2e^x) - ln\frac{1}{2} = 0$

3) $ln(e^x + 1) - ln(e^{-x} + 1) = x$

4) $e^{\ln(x+1) - lnx} = 1 + \frac{1}{x}$

تمرين 02 :

حل على المجال المعطى المعادلات التالية :

($2ln(2x-1) - lnx - ln(2-x) = 0$ ، $I = \left]\frac{1}{2}, 2\right[$

($ln(4x-10) + ln(2x-2)^2 - 2ln(4x-4) = 0$

$I = \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

($(lnx)^2 + lnx - 6 = 0$ ، $I =]0, +\infty[$

($e^{2x+ln2} + e^{x+ln5} = 3$ ، $I = \mathbb{R}$

تمرين 03 :

(حل على $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 + 3x - 28 = 0$

(استنتج حلول كل معادلة من المعادلات التالية على المجال المعطى .

- $ln(x-1) + ln(x+4) = 3ln2 + ln3$ ، $I =]1; +\infty[$
- $(lnx)^2 + 3(lnx) - 28 = 0$ $\quad I =]0; +\infty[$
- $e^{2x} + 3e^x - 28 = 0$ $\quad I = \mathbb{R}$
- $e^x + 3 = 28e^{-x}$ $\quad I = \mathbb{R}$
- $9^x + 3^{x+1} - 28 = 0$ $\quad I = \mathbb{R}$

تمرين 04 :

، على المجال المعطى المتراجحات :

($lnx + \ln(x-1) > ln6$ ، $I =]1; +\infty[$

($\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+3)} < 0$ ، $I =]1; +\infty[$

($(lnx)^2 - 8lnx + 7 > 0$ ، $I =]0; +\infty[$

التمرين 05 :

أحسب $f'(x)$ في الحالات التالية :

$f(x) = 2x + ln(x^2+1)$ ؛ $f(x) = ln|2x+1|$

$f(x) = (x-1)lnx$ ؛ $f(x) = x^2 - x + ln|x|$

$f(x) = -x + \frac{lnx}{x}$ ؛ $f(x) = \frac{x}{1-lnx}$

$f(x) = ln|e^{2x} - 1|$ ؛ $f(x) = -x + ln(\frac{x}{x-1})$

$f(x) = (lnx)^2 + 2lnx - 1$

التمرين 06 :

أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

1) $f(x) = \frac{1}{x} + lnx$ ؛ $D =]0, +\infty[$

2) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x} + \frac{lnx}{x}$ ؛ $D =]0, +\infty[$

3) $f(x) = x^2 - 1 - lnx$ ؛ $D =]0, +\infty[$

4) $f(x) = x^2 - 1 - x^2 lnx$ ؛ $D =]0, +\infty[$

5) $f(x) = 2x + 1 - ln|x|$ ؛ $D = \mathbb{R} - \{0\}$

6) $f(x) = ln(\frac{x-1}{2-x})$ ؛ $D =]1,2[$

7) $f(x) = x^2 - 1 - e^x$ ؛ $D =]-\infty, +\infty[$

8) $f(x) = x + 3 + e^{2x} - e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$

9) $f(x) = (x^2 - x + 1)e^x$ ؛ $D = \mathbb{R}$

10) $f(x) = (x-1)lnx$ ؛ $D =]0, +\infty[$

11) $f(x) = \frac{x-1}{1-lnx}$ ؛ $D =]0, e[\cup]e, +\infty[$

12) $f(x) = \frac{5x-2}{e^x+2}$ ؛ $D = \mathbb{R}$

التمرين 07 :

أحسب النهاية عند العدد المعطى :

1) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$ عند "0"

2) $f(x) = \frac{1}{x}(e^{3x} - 1)$ عند "0" و عند "$+\infty$"

3) $f(x) = x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ عند "$-\infty$" و عند "$+\infty$"

4) $f(x) = xln(\frac{1}{x} + 1)$ عند "$+\infty$"

5) $f(x) = e^{-x} ln(1 + e^x) =$ عند "$+\infty$" و عند "$-\infty$"

مسألة 01 :

الجزء الأول :

g دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = x^2 + 2x + ln(x+1)$$

1) بين أن $g'(x) = \frac{1 + 2(x+1)^2}{x+1}$

2) شكل جدول تغيرات الدالة g

3) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

الجزء الثاني :

f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 1 - \frac{ln(x+1)}{(x+1)}$

1) أ- أحسب النهايات .

ب- بين أن (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ)

ج- أدرس وضعية (Δ) و (C_f)

2) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3.3 و 3.4

4) أرسم (C_f) .

مسألة 02 :

I- 1- حل على $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$2x^2 - 15x + 18 = 0$$

2- استنتج :

أ- حلول المعادلة : $2e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$

ب- إشارة المقدار : $2e^{2x} - 15e^x + 18$

II- f دالة عددية معرفة على $]ln3, +\infty[$ بـ :

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{3}{e^x - 3}$$

1- أحسب النهايات ثم عين المقاربات .

2- أدرس الوضع النسبي بين C_f و المقارب المائل .

3- بين أن $f'(x) = \frac{2e^{2x} - 15e^x + 18}{(e^x - 3)^2}$

عماري

- استنتج من الجزء I إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول التغيرات

4- أنشئ $\mathcal{C}_f$

سألة 03 :

I- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :

$$g(x) = x^2 - 2x + ln|x-1|$$

1- أدرس تغيرات g

2- أحسب $g(0)$ ، $g(2)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ :

$$f(x) = -x + \frac{ln|x-1|}{x-1}$$

1- أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

2- أحسب النهايات ثم شكل جدول التغيرات

3- عين المستقيمين المقاربين

4- عين نقطة تقاطع المقاربين ثم برهن أنها مركز تناظر لـ $\mathcal{C}_f$

5- أرسم $\mathcal{C}_f$.

سألة 04 :

) g دالة عددية معرفة على $[-2,+\infty[$ بـ :

$$g(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$$

عين العددين a , b علما أن معامل توجيه المماس عند النقطة $A(-1,1)$ هو $(-e)$

(I نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-2,+\infty[$ بـ :

$$f(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$$

1) أحسب النهايات ثم فسر هندسيا

2) أدرس التغيرات ثم شكل جدول التغيرات

3) بين أن $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطة انعطاف I

4) أكتب معادلة المماس T لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند I

5) أرسم T ثم $\mathcal{C}_f$

(II h دالة عددية معرفة على $[-2,+\infty[$ بـ :

$$h(x) = f(x^2)$$

تعمال مشتقة دالة مركبة ، عين اتجاه تغير الدالة h ثم كل جدول تغيراتها

سألة 05 :

1) g دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كمايلي :

$$g(x) = 2x + lnx$$

أ- شكل جدول تغيرات الدالة g

ب- بين ان من أجل $x \in [1;+\infty[$ يكون $g(x) \neq 0$

2) f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ كمايلي :

$$f(x) = \frac{6lnx}{2x+lnx}$$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ت- عين قيم العدد الحقيقي k بحيث تقبل المعادلة $f(x) = k$ حلين متمايزين .

ث- عين معادلة المماس (Δ_1) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 .

3) نعتبر الدالة h المعرفة على $[1;+\infty[$ بـ : $g(x) = f(e^x)$

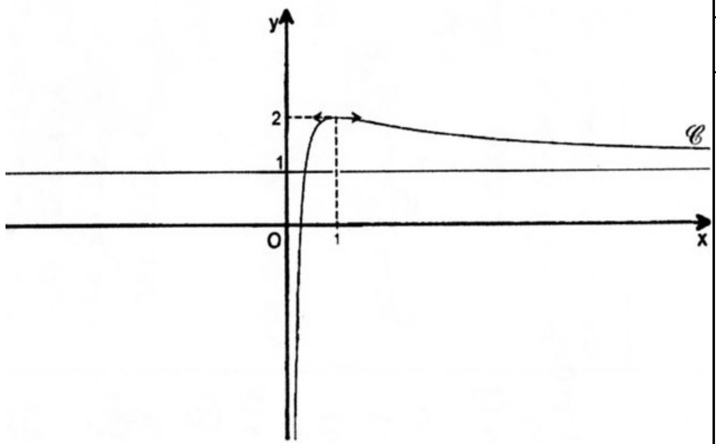
أ. شكل جدول تغيرات الدالة h

ب. عين معادلة المماس (Δ_2) لـ $(\mathcal{C}_h)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

ت. أرسم كلا من (Δ_1) ، (Δ_2) ، $(\mathcal{C}_f)$ ، $(\mathcal{C}_h)$ في نفس المعلم .

مسألة 06 :

I) المنحنى الآتي $(\mathcal{C})$ يمثل دالة f معرفة على $]0,+\infty[$



المستقيمان $x = 0$ و $y = 1$ مقاربان لهذا المنحنى .

1) باستعمال المنحنى البياني عين :

أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

ب- جدول التغيرات .

2) نفرض أن عبارة $f(x)$ من الشكل : $f(x) = a + \frac{b}{x} + c\frac{Lnx}{x}$

حيث a , b , c أعداد حقيقية .

أ- بين أن من أجل $x > 0$: $f'(x) = -\frac{b}{x^2} + c\left(\frac{1-Lnx}{x^2}\right)$

ب- بين بالرجوع إلى المنحنى أن a , b , c تحقق الجملة :
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ c - b = 0 \end{cases}$$

ج- استنتج عبارة $f(x)$

II) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = f(e^{-x})$$

1) بين أن : $g(x) = (1-x)e^x + 1$

2) شكل جدول تغيرات الدالة g .

3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < \frac{3}{2}$

4) أرسم المنحنى $\mathcal{C}_g$ على المجال $]-\infty, 2]$ في معلم متعامد و متجانس .

مسألة 07 :

(I g دالة عددية معرفة على $]\mathbf{0},+\infty[$ بـ :

$$g(x) = lnx + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1) أدرس تغيرات g

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\boldsymbol{\alpha}$ حيث $\alpha \in]0,+\infty[$

3) عين العدد الطبيعي n حيث
$$\frac{n}{10} < \alpha < \frac{n+1}{10}$$

4) عين إشارة $g(x)$

(II نعتبر الدالة f المعرفة على $]\mathbf{0},+\infty[$ بـ :

$$f(x) = e^x\left(lnx + \frac{1}{x}\right)$$

$\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني حيث $||\vec{\imath}|| = 4cm$ و $||\vec{\jmath}|| = 1cm$

1- أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) بين أن $f(x) = \frac{e^x}{x}(xlnx + 1)$ ثم أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

2- بين أن $f'(x) = e^x g(x)$

3- أنشئ جدول التغيرات لـ (f)

4- بين أن $f(\alpha) = \frac{(1-\alpha)e^\alpha}{\alpha^2}$ ثم عين حصرا لـ $f(\alpha)$

5- أكتب معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة (1) ثم أنشئ (T) و $\mathcal{C}_f$.

عماري