نيابة فاس الجديد دار دبيبغ　　　　امتحان تجريبي (علوم تجريبية)

التمرين الأول

-1

f(0)=0 و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}}\ln(e^{-x}+x^2)=0$ أي $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\prec 0}} f(x)=f(0)$ إذن f متصلة في 0

-2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{x}{3}-\sqrt[3]{1+x}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(e^{-x}+x^2)$$
$$=+\infty$$

شكل محدد

-3

-أ

$$\forall x\in\left]-\infty,0\right[: f(x)=\ln(e^{-x}+x^2)$$
$$=\ln\left(e^{-x}\left(1+x^2e^x\right)\right)$$
$$=\ln\left(e^{-x}\right)+\ln\left(1+x^2e^x\right)$$
$$=-x+\ln\left(1+x^2e^x\right)$$

-ب

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2e^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+4\left(\left(\frac{x}{2}\right)e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\right)=0$ فإن المستقيم $\boxed{y=-x}$ مقارب مائل لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

-ج

لكل $x\prec 0$ لدينا : $f(x)-(-x)=\ln\left(1+x^2e^x\right)\succ 0$ (لأن $1+x^2e^x\succ 1$) أي $f(x)\succ -x$ إذن C_f فوق المقارب المائل $y=-x$.

-د

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\dfrac{x}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt[3]{1+x}=-\infty$

إذن منحنى الدالة يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $y=\dfrac{x}{3}$ بجوار

-4

بما أن :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1+\frac{x}{3}-\sqrt[3]{1+x}}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\frac{x}{3}-\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\frac{x}{3}-\frac{1+x-1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{\frac{x}{3}-\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\succ0}}\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}\\&=0\end{aligned}$$

فإن **f** قابلة للاشتقاق على يمين 0 و $f_d'(0)=0$ **.** منحنى الدالة **f** يقبل نصف مماس موازي لمحور الأفاصيل على يمين الصفر.

بما أن :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{\ln(e^{-x}+x^2)}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}\frac{\ln\left(e^{-x}\right)+\ln\left(1+x^2e^{x}\right)}{x}\\&=\lim_{\substack{x\to0\\x\prec0}}-1+\frac{\ln\left(1+x^2e^{x}\right)}{x^2e^{x}}\times xe^{x}\\&=-1\end{aligned}$$

فإن **f** قابلة للاشتقاق على يسار 0 و $f_g'(0)=-1$. منحنى الدالة **f** يقبل نصف مماس على يسار الصفر معامله الموجه هو -1

-5

$$\begin{aligned}\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right):f'(x)&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{3}-1}\\&=\frac{1}{3}\left(1-(1+x)^{\frac{-2}{3}}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\right)\end{aligned}$$

لاحظ أنه لكل $x\succ0$ ، $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\prec1$ أي

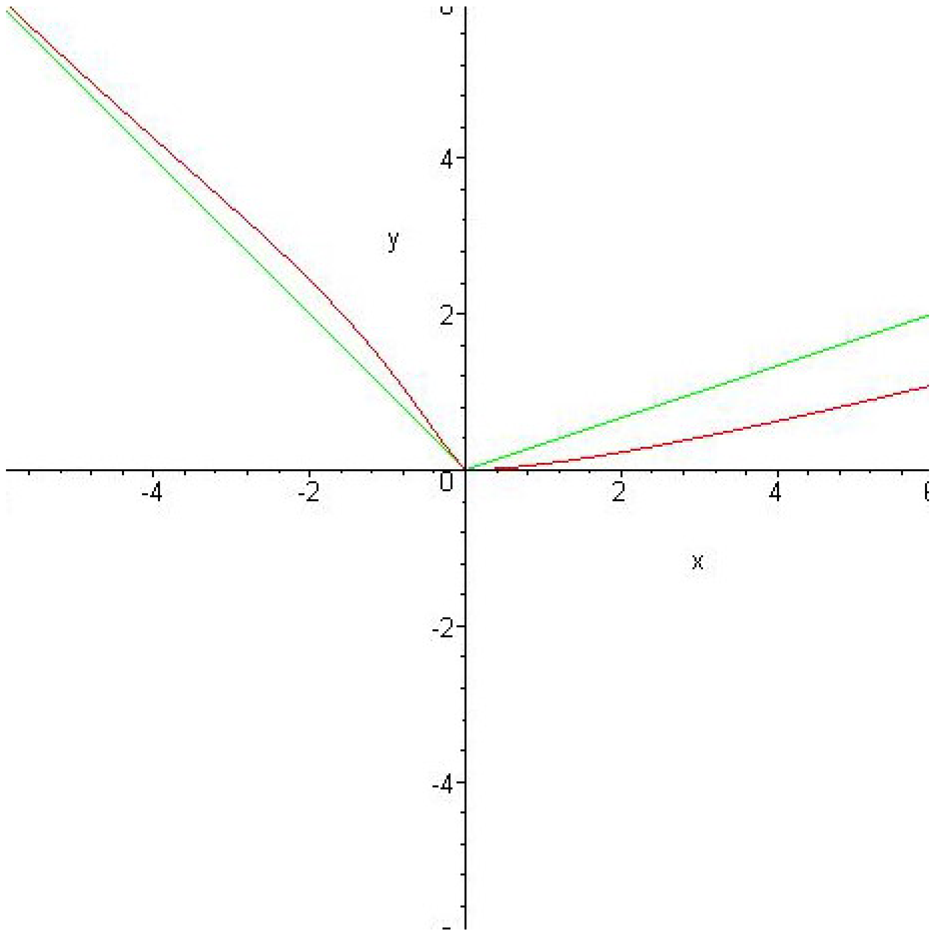
$$\begin{aligned}\left(\forall x\in\mathbb{R}_-^*\right):f'(x)&=\frac{-e^{-x}+2x}{e^{-x}+x^2}\\&=\frac{-e^{-x}.e^{x}+2x.e^{x}}{e^{-x}.e^{x}+x^2.e^{x}}\\&=\frac{-1+2x.e^{x}}{1+x^2.e^{x}}\prec0\end{aligned}$$

. $f'(x) \succ 0$

-6

$f(x)$	$f'(x)$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	-1 0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

-7



-8

أ- دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}+k$ $(k \in \mathbb{R})$

دالة أصلية للدالة $x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$ و تنعدم في الصفر هي الدالة $x \mapsto \frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}$

ب-

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^7 \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)dx \\
&= \left[\frac{3}{4}(1+x)\sqrt[3]{1+x}-\frac{3}{4}-x\right]_0^7 \\
&= \frac{17}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^7 \left|f(x)-\frac{x}{3}\right|dx \\
&= \int_0^7 \left|1-\sqrt[3]{1+x}\right|dx \\
&= \int_0^7 \left(\sqrt[3]{1+x}-1\right)dx \\
&= \frac{17}{4}
\end{aligned}
$$

التمرين الثاني (3 ن)

-1

$\overrightarrow{AB}(-4;-2;-4)$ و $\overrightarrow{AC}(-7;0;0)$ إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\left(\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -4 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & 0\\ -4 & -7\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-4 & -7\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)$ أي

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0;28;-14)$

مساحة المثلث ABC هي

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{0^2+28^2+(-14)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{784+196} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

-2

$$
\begin{aligned}
\left|\sin\left(\overrightarrow{AB}\,\widehat{\wedge}\,\overrightarrow{AC}\right)\right| &= \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \\
&= \frac{14\sqrt{5}}{6\times 7} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{3}
\end{aligned}
$$

-3

$$d\left(B,(AC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\|AC\|}$$
$$=\frac{14\sqrt{5}}{7}$$
$$=2\sqrt{5}$$

-4

بما $[AB]\subset(ABC)$ فإن Ω منتصف القطعة $[AB]$ أي مركز الفلكة ينتمي إلى المستوى (ABC) إذن $d\left(\Omega,(ABC)\right)=0\prec\frac{AB}{2}$ و عليه فإن الفلكة تقطع المستوى وفق دائرة كبرى مركزها Ω و شعاعها $\frac{AB}{2}$

التمرين الثالث (3.5 ن)

-1

كون الامكانيات يتكون من تأليفات ل 3 كرات من بين 10 كرات

$$card\Omega=C_{10}^{3}$$
$$=\frac{10!}{3!\times7!}$$
$$=\frac{8\times9\times10}{6}$$
$$=120$$

-2

أ-

احتمال الحدث **A** :

$$P(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$$
$$=\frac{C_3^3+C_4^3+C_3^3}{120}$$
$$=\frac{1+4+1}{120}$$
$$=\frac{1}{20}$$

احتمال الحدث **B** :

$$P(B)=1-\frac{C_7^3}{120}$$
$$=\frac{85}{120}$$

ب-

$A\cap B$: "الحصول على 3 كرات حمراء " $\qquad P\left(A\cap B\right)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$

الحدثان غير مستقلين لأن $P\left(A\cap B\right)\neq P(A)\times P(B)$

-3

$$X(\Omega)=\{0;1;2;3\}$$

$$P(x=0)=\frac{C_7^3}{120}=\frac{35}{120}$$

$$P(x=1)=\frac{C_3^1\times C_7^2}{120}=\frac{3\times 21}{120}=\frac{63}{120}$$

$$P(x=2)=\frac{C_3^2\times C_7^1}{120}=\frac{3\times 7}{120}=\frac{21}{120}$$

$$P(x=0)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$$

-4

$$P=C_5^2\times\left(P(A)\right)^2\left(1-P(A)\right)^3$$
$$=C_5^2\times\left(\frac{1}{20}\right)^2\left(\frac{19}{20}\right)^3$$

$\boxed{\text{التمرين الرابع } (3 \text{ ن})}$

-1

أ- المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا αi يعني :

$(\alpha i)^2-\left(1+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right)(\alpha i)+i+\sqrt{3}=0$ تعني $\left(-\alpha^2+\alpha\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right)+(1-\alpha)i=0$ تعني

$1-\alpha=0$ و $\left(-\alpha^2+\alpha\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\right)=0$ أي $\alpha=1$

إذن (E) تقبل حلا تخيليا صرف و هو $z_0=i$.

ب- ليكن z_1 الحل الثاني للمعادلة (E):

لدينا $z_0+z_1=1+i\left(1-\sqrt{3}\right)$ أي $z_1=1+i\left(1-\sqrt{3}\right)-i=1-i\sqrt{3}$

-2

أ-

$z_A=1+i=\left[\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right]$ $\quad$ $z_B=i=\left[1,\frac{\pi}{2}\right]$ $\quad$ $z_C=1-i\sqrt{3}=\left[2,-\frac{\pi}{3}\right]$

ب-

$$\overline{\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)}\equiv\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\arg\left(i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

-3

$\left|z-1+i\sqrt{3}\right|=\left|z-1-i\right| \Leftrightarrow \left|z-z_C\right|=\left|z-z_A\right|$ أي $MC=MA$ إذن مجموعة النقط **M** هو واسط القطعة $[AC]$

3

التمرين الخامس (3 ن)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases}(\forall n\in\mathbb{N}): u_{n+1}=2u_n-1\\ u_0=2\end{cases}$$

-1

البرهان بالترجع:

لدينا $u_0 \succ 1$ حسب معطيات التمرين

نفترض أنه توجد رتبة n_0 من $\mathbb{N}$ حيث : $\forall n\leq n_0 : u_n \succ 1$

$$\forall n\leq n_0 : u_n \succ 1 \Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : 2u_n \succ 2$$

لدينا $\Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : 2u_n -1 \succ 1$

$$\Leftrightarrow \forall n\leq n_0 : u_{n+1} \succ 1$$

وعلية فإن $\forall n\in\mathbb{N} : u_n \succ 1$

-2

أ-

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N}): v_{n+1} &= u_{n+1}-1\\ &= 2u_n-2\\ &= 2(u_n-1)\\ &= 2v_n\end{aligned}$$

إذن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها 2 و $v_0=u_0-1=1$

الحد العام $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=2^n$

ب-

$$\begin{aligned}(\forall n\in\mathbb{N}): w_{n+1}-w_n &= \ln\left(v_{n+1}\right)-\ln\left(v_n\right)\\ &= \ln\left(\frac{u_{n+1}-1}{u_n-1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2u_n-1-1}{u_n-1}\right)\\ &= \ln\left(\frac{2\left(u_n-1\right)}{\left(u_n-1\right)}\right)\\ &= \ln 2\end{aligned}$$

إذن $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ و $w_0=\ln\left(v_0\right)=0$

الحد العام : $\forall n\in\mathbb{N}, w_n=n\ln 2=\ln 2^n$

ج-

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{w_n}{v_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n}\ln 2 \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n\dfrac{\ln 2}{2}\right)^2}{\left(e^{n\frac{\ln 2}{2}}\right)^2} \times \frac{4}{\ln 2} \\
&= \lim_{h\to+\infty} \left(\frac{h}{e^h}\right)^2 \times \frac{4}{\ln 2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$