المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي — الصفحة $\frac{1}{3}$

ثانوية ابن سينا التأهيلية
بني ملال

قطـاع التربية الوطنية

الامتحان التجريبي الموحد للبكالوريا

الموضوع C :

(دورة أبريل 2006)

المادة : **الرياضيات** — مدة الإنجاز : **أربع ساعات**

الشعبة : **العلوم الرياضية أ** — المعامل : **10**

التمرين الأول : (3,5 نقطة)

ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 7 . نعتبر العدد الطبيعي $N=p^4-1$.

1. أ. بين أن : $p\equiv 1\ [3]$ أو $p\equiv -1\ [3]$.
   ب. استنتج أن $N=p^4-1$ قابل للقسمة على 3 .
2. أ. بين أنه يوجد عدد طبيعي k بحيث : $p^2-1=4k(k+1)$.
   ب. استنتج أن $N=p^4-1$ قابل للقسمة على 16 .
3. اعتمادا على جميع بواقي القسمة الإقليدية للعدد p على 5 بين أن $N=p^4-1$ قابل للقسمة على 5 .
4. استنتج من كل ما سبق أن العدد $N=p^4-1$ قابل للقسمة على 240 .
5. أ. بين أن العدد 1499 أولي.
   ب. هل توجد خمسة عشر عددا أوليا p_1 و p_2 و $\cdots\cdots$ و p_{15} أكبر من أو تساوي 7 بحيث : $p_1^4+p_2^4+\cdots\cdots+p_{15}^4=1499$.

<u>التمرين الثاني</u> : (4 نقط)

نعتبر العدد العقدي $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ ، حيث α عدد حقيقي يحقق $\alpha\in]-\pi,0[\cup]0,\pi[$.

1. حدد بدلالة α معيار وعمدة العددين العقديين $z+1$ و $z-1$.
2. نفترض أن $\alpha=\frac{2\pi}{1+2n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$
   أ. بين أن $\sum_{k=0}^{2n}(-z)^k=\frac{2}{1+z}$ واستنتج أن $|1+z|\geq\frac{2}{1+2n}$.
   ب. بين أن $\cos\frac{\pi}{1+2n}\geq\frac{1}{1+2n}$.
3. نفترض أن $0<\alpha<\pi$ ونضع : $Z=\frac{z(z+1)}{(z-1)^2}$
   بين أن $\overline{Z}=\frac{z+1}{(z-1)^2}$ وحدد بدلالة α معيار وعمدة Z .
4. نعتبر (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق Z في المستوى العقدي عندما يتغير α في المجال $]0,\pi[$ ،
   أ. اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ).
   ب. أنشئ (Γ) .

من إعداد الأستاذين : محمد بوأشيشان و محمد جبار

التمرين الثالث : ($2,5$ نقطة)

نتوفر على مائة نرد من بينها خمسة وعشرون نردا مغشوشا. عندما نرمي نردا مغشوشا فإن احتمال الحصول على الرقم 6 يساوي $\frac{1}{2}$.

1. نختار عشوائيا نردا واحدا ثم نرميه على الأرض فنحصل على الرقم 6 .
ما هو احتمال أن يكون هذا النرد مغشوشا.

2. نفترض أننا اخترنا عشوائيا نردا واحدا من بين المائة ورميناه على الأرض مرتين متتابعتين حصلنا فيهما على الرقم 6.
ما هو احتمال أن يكون هذا النرد مغشوشا.

مسألة : (10 نقط)

A. لتكن h الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ كالتالي :

$h(x)=x-\ln x$ (حيث $\ln$ هي دالة اللوغاريتم النبيري)

1. بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $h(x)\geq 1$.

2. لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x} & : \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ. بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0,+\infty[$.

ب. هل f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر .

B. نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. أ. بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$.

ب. بين أن : $\begin{cases} F'(x)=\dfrac{\ln 2-\ln x}{h(2x)h(x)} & : \quad x>0 \\ F'(0)=0 \end{cases}$.

2. ليكن x عددا من $]0,+\infty[$. احسب التكامل التالي : $\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$.

3. أ. بين أن لكل x من $[1,+\infty[$: $0\leq F(x)-\ln 2\leq \dfrac{\ln 2x}{x-\ln x}$.

ب. استنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

4. أ. بين أن : $F(\frac{1}{2})\leq \ln 2$.

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي α من $\left[\frac{1}{2},1\right]$ بحيث : $F(\alpha)=\ln 2$.

من إعداد الأستاذين : محمد بوأشيشان و محمد جبار

5. أ. ضع جدول تغيرات الدالة F .

ب. ارسم (C) التمثيل المبياني للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $F(1)\approx 0,9$ و $F(2)\approx 1,1$) .

C. في هذا الجزء ، n يرمز لعدد طبيعي غير منعدم .

1. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي :

$$u_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{t}{t-\ln t}dt$$

أ. بين أن لكل عدد t من $]0,+\infty[$: $\frac{t}{t-\ln t}\le t$.

ب. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وأن : $0\le\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le\frac{1}{2}$.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي :

$$v_n=\int_{1}^{n}\frac{t}{t-\ln t}dt$$

أ. بين أن لكل t من $[1,+\infty[$: $\frac{t}{t-\ln t}\le 1+\ln t$.

ب. استنتج أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: $v_n\le n\ln(n)$.

3. أ. احسب التكامل $\int_1^n\left(1+\frac{\ln t}{t}\right)dt$.

ب. بين أن لكل n حيث $n\ge 5$: $n\le v_n$. (نأخذ $e^{\sqrt{2}}\approx 4,12$) .

د. استنتج حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.
