



C: NS24

مدة الإجازة: 4

المعامل: 10

المادة: الرياضيات

الشعب (ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

التمرين الأول (3 نقط)

1/ ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. لكل زوج (a, b) من E^2 ، نضع: $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$

(أ-1) تحقق أن لكل زوج (a, b) من E^2 : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2}-1)(b\sqrt{2}-1)$ 0.25

(ب) استنتج أن \perp قانون تركيب داخلي في E . 0.25

2- بين أن (E, \perp) زمرة تبادلية. 0.5

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \Pi$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة

واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي. لكن \mathcal{F} مجموعة

المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي نكتب على الشكل: $M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-a & a \\ a & \sqrt{2}-a \end{pmatrix}$ حيث $a \in E$

نضع: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(أ-1) تحقق أن: $A^2 = -2A$ وأن $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$ 0.5

(ب) بين أن \mathcal{F} جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$. 0.5

$\varphi: (E, \perp) \rightarrow (\mathcal{F}, \times)$

2- نعتبر التطبيق: $a \rightarrow \varphi(a) = M(a)$

(أ) بين أن φ تشاكل تقابلي. 0.5

(ب) استنتج بنية (\mathcal{F}, \times) . 0.5

التمرين الثاني (3.5 نقطة)

ليكن a عددا عقديا مخالفا للعددين العقديين i و $-i$.

(أ-1) تحقق أن العدد العقدي $u = a + i$ حل للمعادلة: $(E) z^2 - (1+a)(1+i)z + (1+a^2)i = 0$ 0.25

(ب) حدد v الحل الثاني للمعادلة (E). 0.25

2- نفترض أن : $|a|=1$

0.25 (أ) بين أن : $\frac{u}{v} \in \mathbb{R}$

0.25 (ب) تحقق أن : $u^2 = a[(a - \bar{a}) + 2i]$

0.5 (ج) استنتج أن : $\arg(u) \equiv \frac{1}{2} \arg(a) + \frac{\pi}{4} [\pi]$

0.5 3- بين أن : $|u| + |v| \geq 2$

II / المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.

ليكن m عددا حقيقيا أكبر قطعا من 2 و (E_m) مجموعة النقط $M(a)$ من المستوى العقدي بحيث:

$$|u| + |v| = m$$

0.5 1- بين أن (E_m) إهليلج مركزه O .

2- نضع: $a = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان.

0.25 (أ) بين أن : $x^2 + \left(1 - \frac{4}{m^2}\right)y^2 = \frac{m^2}{4} - 1$ معادلة ديكارتية للإهليلج (E_m)

0.25 (ب) أنشئ (E_4) .

0.5 3- نعتبر النقطتين $A(\sqrt{3})$ و $B(2i)$ راسي الإهليلج (E_4) .

بين أن المستقيم (AB) مماس للإهليلج $(E_{\frac{8}{7}})$.

التمرين الثالث (3 نقط)

1- نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E): 195x - 232y = 1$

0.5 (أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232

0.5 (ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$

0.25 (ج) لوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1 [232]$

0.25 2- بين أن 233 عدد أولي

3- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعروف بما يلي : مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة

الأقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $(\forall a \in A \setminus \{0\}) a^{232} \equiv 1 [233]$

0.5 (أ) بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $a = b$

0.5 (ب) ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث : $f(a) = b$ ، حدد a بدلالة b .

0.5 (ج) استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1} .

التمرين الرابع (10.5 نقطة)

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1- بين أن لكل x من \mathbb{R} : $g(x) \geq 0$ 0.5

2- بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$ 0.25

II/ لنكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j})

1- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + x)$ 0.5

2- بين أن الدالة f متصلة في 0 . 0.25

3- (أ) احسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من \mathbb{R}^* . 0.5

(ب) استنتج تغيرات الدالة f . 0.25

4- نعتبر التكامل $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$ حيث x عدد حقيقي.

(أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$ 0.5

(ب) بين أن لكل x من \mathbb{R} : $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$ ان

(ج) بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$ 0.5

(د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 وأن $f'(0) = -\frac{1}{2}$ 0.75

5- (أ) بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x-2) + 2 + x)$ 0.5

(ب) ادرس إشارة $e^x(x-2) + 2 + x$ لكل x من \mathbb{R} . 0.5

(ج) استنتج أن لكل x من \mathbb{R}^* : $f''(x) > 0$ 0.25

(د) أنشئ (C) . 0.5

III/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و لكل n من \mathbb{N} : $u_{n+1} = f(u_n)$

1- بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $f(x) = x$ 0.25

2- (أ) بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ 0.5

الصفحة
4
4

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
(الدورة العادية 2007)
الموضوع

المادة : الرياضيات

C:NS24

الشعب (ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)

0.5 (ب) بين أن لكل n من N : $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

0.5 (ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \in N}$ متقاربة وحدد نهايتها .

IV/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt ; x \neq 0$
 $F(0) = 0$

0.5 1- أ) بين أن لكل x من \mathbb{R}^* : $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

0.25 (ب) بين أن الدالة F متصلة في 0 .

0.5 (ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$

0.5 2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}^* وأن لكل x من \mathbb{R}^* : $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

0.25 (ب) ادرس تغيرات الدالة F .