

<p>الثانية علوم رياضية أ و ب مدة الإنجاز: 4 ساعات المعامل : 10</p>	<p>الامتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا دورة : يوليو 2004 ( الدورة العادية )</p>	<p>المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والشباب</p>
--	--	---

التمرين الأول ( 3نقط )

- (1) ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا .  
أ- بين أنه إذا كان  $n$  فرديا فإن :  $n^2 \equiv 1[8]$  0,5  
ب- بين أنه إذا كان  $n$  زوجيا فإن :  $n^2 \equiv 0[8]$  أو  $n^2 \equiv 4[8]$  0,5  
(2) لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعدادا صحيحة طبيعية فردية .  
أ- بين أن :  $a^2 + b^2 + c^2$  ليس مربعا كاملا ( أي ليس مربعا عدد صحيح ) 0,5  
ب - بين أن :  $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$  0,5  
( لاحظ أن :  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$  )  
ج - استنتج أن  $2(ab + bc + ca)$  ليس مربعا كاملا . 0,5  
د- بين أن  $ab + bc + ca$  ليس مربعا كاملا. 0,5

التمرين الثاني ( 3نقط )

- لتكن  $E$  مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل  

$$M_a = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ 0 & -a \end{bmatrix}$$
و  $F$  مجموعة المصفوفات التي تكتب على الشكل  

$$N_a = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}(a - \frac{1}{a}) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{bmatrix}$$
حيث  $a$  عدد حقيقي غير منعدم .  
(1) أ- بين أن :  $M_a \times M_b = M_{ab}$  :  $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*2})$  0,5  
ب - ليكن  $\varphi$  التطبيق المعرف من  $\mathbb{R}^*$  نحو  $E$  بحيث  $\varphi(a) = M_a$  .  
بين أن  $\varphi$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  نحو  $(E, \times)$  . 0,5  
استنتج البنية الجبرية لـ  $(E, \times)$  . 0,25  
(2) أ- بين أن :  $N_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$  :  $(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^{*2})$  0,25  
ب - نضع  $G = E \cup F$  . بين أن  $(G, \times)$  زمرة . 1  
ج- هل  $(G, \times)$  زمرة تبادلية ؟ 0,25

التمرين الثالث ( 3 نقط و نصف )

- (1) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة  $z^2 + z + 1 = 0$  0,5  
(2) لكل عدد عقدي  $z$  حيث  $z = e^{i\theta}$  مع  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  و  $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$  و  $\theta \neq -\frac{2\pi}{3}$  نضع  

$$z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$$

أ- تحقق من أن  $z^2 + z + 1 = z(1 + z + \bar{z})$

0,5

ب - احسب معيار وعمدة  $z$  بدلالة  $\theta$  .

1

ج - نضع  $z' = x + iy$  حيث  $x$  و  $y$  عدنان حقيتيان .

0,5

بين أن  $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$

د- استنتج أن النقطة  $M$  ذات اللق  $z'$  تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه

1

ومقاربيه .

### التمرين الرابع ( 10 نقط و نصف )

I - لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $IR^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$  .

1

(1) أحسب نهايات الدالة  $f$  عند محداث مجموعة تعريفها.

0,5

(2) أدرس تغيرات الدالة  $f$  .

(3) ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم .

أ- أدرس الفروع اللا نهائية للمنحنى  $(C)$  .

0,5

ب- أرسم المنحنى  $(C)$  .

0,5

II - لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$(\forall n \in IN) : u_{n+1} = u_n^2 f(u_n) = u_n e^{-u_n} \text{ و } u_0 = 1$$

(1) بين أن  $(\forall x \in IR) : e^x \geq x + 1$  .

0,5

(2) استنتج أن  $(\forall x > 0) : x^2 f(x) \leq \frac{x}{x+1}$

0,25

(3) أ- باستعمال البرهان بالترجع بين أن  $(\forall n \in IN) : 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

0,5

ب - بين أن  $(u_n)$  متتالية متقاربة وحدد نهايتها .

0,25

(4) نضع من أجل كل  $n$  من  $IN^*$   $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$

(أ) بين أنه لكل  $n$  من  $IN^*$   $v_n = \ln\left(\frac{1}{u_n}\right)$  .

0,5

(ب) حدد نهاية المتتالية  $(v_n)$  .

0,25

III - نعتبر الدالة العددية  $F$  المعرفة على المجال  $[0, +\infty[$  بما يلي :

$$\begin{cases} F(x) = \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt & ; x > 0 \\ F(0) = 2 \ln 2 \end{cases}$$

(1) أ- تحقق من أن :  $(\forall x > 0) : \int_{x^2}^{4x^2} f(t) dt = 2 \ln(2)$

0,5

ب - باستعمال نتيجة السؤال II (1) بين أن :  $(\forall t > 0) : -t \leq e^{-t} - 1 \leq 0$

0,25

(2) أ- بين أن :  $(\forall x > 0) : -3x^2 \leq F(x) - 2 \ln(2) \leq 0$  .

0,5

ب - استنتج أن  $F$  متصلة وقابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0.

0,5

(3) أ- بين أن :  $(\forall t \geq 1) : f(t) \leq e^{-t}$

0,25

ب- استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  .

0,5

(4) أ- بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $[0, +\infty[$  وأحسب  $F'(x)$  .

0,75

ب - أعط جدول تغيرات الدالة  $F$  .

0,5

ج - ارسم المنحنى الممثل للدالة  $F$  في معلم متعامد ممنظم .

0,5

...

(5) لتكن  $G$  الدالة المعرفة على  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $G(x) = \int_x^{4x} e^{-t} \ln(t) dt$

أ- بين أن  $(\forall x > 0) : G(x) = F(\sqrt{x}) - e^{-4x} \ln(4x) + e^{-x} \ln(x)$

ب - أحسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} - e^{-4x}) \ln(x)$

ج - استنج  $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$

0,5

0,5

0,5