



مدة الإنجاز: 4

المعامل: 10

المادة: الرياضيات

الشعب(ة): العلوم الرياضية (أ) و (ب)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

<http://arabmaths.ift.fr>

التمرين الأول (3 نقط)

نعتبر في  $\mathbb{Z}$  النظام (S) التالية :  $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$  حيث  $a$  و  $b$  و  $p$  و  $q$  أعداد صحيحة نسبية و  $p \wedge q = 1$

0.5 ن (أ) - بين أنه يوجد زوج  $(u_0, v_0)$  من  $\mathbb{Z}^2$  بحيث :  $pu_0 + qv_0 = 1$

0.5 ن (ب) - بين أن :  $x_0 = bpu_0 + aqv_0$  حل للنظمة (S).

0.5 ن 2- ليكن  $x$  حلا للنظمة (S). بين أن العدد  $pq$  يقسم العدد  $x - x_0$ .

0.5 ن 3- ليكن  $x$  عددا صحيحا نسبيا بحيث  $pq$  يقسم العدد  $x - x_0$ . بين أن  $x$  حل للنظمة (S).

0.5 ن 4- استنتج مجموعة حلول النظمة (S).

0.5 ن 5- حل في  $\mathbb{Z}$  النظام التالية :  $\begin{cases} x \equiv 1[8] \\ x \equiv 3[13] \end{cases}$

التمرين الثاني (نقطتان)

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 . لدينا  $n$  صندوقا مرقما من 1 إلى  $n$ . الصندوق رقم  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) يحتوي على  $k$  كرة بيضاء و  $n - k$  كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصندوقين ثم نسحب منه كرة واحدة.

0.5 ن 1- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

0.75 ن 2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

0.75 ن 3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

التمرين الثالث (3 نقط)

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \bar{u}, \bar{v})$ .

نعتبر المجموعة :  $(H) = \{M(z) \in (P) / z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 = 1\}$

0.25 ن (أ) - حدد معادلة ديكارتية للمجموعة (H)

0.5 ن (ب) - بين أن (H) هذلول و حدد مركزه و رأسيه و مقاربيه في المعلم  $(O, \bar{u}, \bar{v})$ .

0.25 ن (ج) - انشئ (H).

2-  $M(z)$  و  $M(z')$  نقطتان من (H). نضع :  $\varphi(z, z') = z\bar{z}' + \bar{z}z' - \bar{z}\bar{z}'$

0.5 ن (أ) - بين أن :  $M(\varphi(z, z')) \in (H)$

0.5 ن (ب) - تحقق أن  $\varphi(z, 1) = z$  وأن  $\varphi(z, \bar{z}) = 1$ .

3- نزود (H) بقانون التركيب الداخلي \* حيث لكل  $M(z)$  و  $M(z')$  من (H) :

$$M(z) * M(z') = M(\varphi(z, z'))$$

بين أن :  $((H), *)$  زمرة تبادلية .

التمرين الرابع ( 3 نقط )

$M_2(\mathbb{R})$  مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2 . نذكر أن  $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المجموعة التالية :  $\mathcal{F} = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  مزودة بجمع

المصفوفات (+) و ضرب مصفوفة في عدد حقيقي (.) و ضرب المصفوفات (x) .

نضع :  $O = M(0, 0)$  و  $J = M(0, 1)$  و  $I = M(1, 0)$

0.5 ن (أ-1) بين أن  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي .

0.5 ن (ب) بين أن  $(I, J)$  أساس للفضاء المتجهي  $(\mathcal{F}, +, \cdot)$  واعط بعده .

0.5 ن 2- ليكن  $\alpha$  عددا عقديا لا ينتمي إلى  $\mathbb{R}$

بين أن الأسرة  $(1, \alpha)$  أساس للفضاء المتجهي الحقيقي  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

3- نعتبر التطبيق  $\psi$  من  $\mathbb{C}$  نحو  $\mathcal{F}$  المعرف بما يلي :

$\psi(z) = M(a, b)$  لكل عنصر  $z$  من  $\mathbb{C}$  حيث :  $z = a + \alpha b$  و  $a$  و  $b$  عددا حقيقيان .

0.5 ن (أ) تحقق أن :  $J^2 = -2(I + J)$  و أن :  $\psi(\alpha) = J$

0.5 ن (ب) حدد قيمتي  $\alpha$  التي يكون من أجلهما التطبيق  $\psi$  تشاكلا تقابليا من  $(\mathbb{C}, x)$  نحو  $(\mathcal{F}, x)$

0.5 ن 4- نأخذ :  $\alpha = -1 + i$

اكتب في الأساس  $(I, J)$  المصفوفة  $J^{2007}$  .

التمرين الخامس ( 9 نقط )

1/ I - لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :  $g(x) = 1 + x - e^{-x}$

0.25 ن (أ) ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  .

0.5 ن (ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  وضع جدول تغيرات  $g$  .

0.25 ن (ج) استنتج أن  $x_0 = 0$  هو الحل الوحيد للمعادلة  $g(x) = 0$  .

2- لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{1 + x - e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.5 ن (أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

0.25 ن (ب) احسب  $f'(x)$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}^*$  .

الصفحة
3
3

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
K (الدورة الاستدراكية 2007)  
الموضوع

C: RS24

المادة :	الرياضيات
الشعب (ة) :	العلوم الرياضية (أ) و (ب)

<http://arabmaths.ift.fr>

- ...
- (ج) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ . 0.25
- (د) أنشئ (C). 0.5
- 3- أ) ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  0.5
- بين أن المعادلة  $f(x) = n$  تقبل حلا وحيدا  $x_n$  في المجال  $]0; +\infty[$ . 0.5
- (ب) بين أن المتتالية  $(x_n)_{n \geq 1}$  تناقصية وأنها متقاربة. 0.5
- (ج) أثبت أن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . 0.5
- II / 1- أ) بين أن المعادلة  $f(x) = 1$  تكافئ المعادلة  $e^{-x} = x$  0.25
- (ب) بين أن المعادلة  $e^{-x} = x$  تقبل حلا وحيدا هو  $\alpha = x_1$  وأن  $\frac{1}{e} \leq \alpha \leq 1$  0.5
- 2- نعتبر المتتالية  $(y_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي  $y_1 = 1$  و  $\forall n \in \mathbb{N}^*; y_{n+1} = e^{-y_n}$  0.5
- (أ) بين أن لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$   $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$  0.5
- (ب) بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^*; |y_{n+1} - \alpha| \leq e^{-\frac{1}{e}} |y_n - \alpha|$  0.5
- (ج) استنتج أن  $(y_n)_{n \geq 1}$  متقاربة محددتا نهايتها. 0.5
- III/ لتكن  $F$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}_+$  بما يلي  $F(0) = \frac{1}{2} \ln 2$  و  $\forall x > 0; F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$  0.5
- 1- أ) بين أن  $\forall t > 0; \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$  0.25
- (ب) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  0.5
- 2- أ) بين أن  $(\forall t \geq 0) \quad 1-t \leq e^{-t} \leq 1-t + \frac{t^2}{2}$  0.5
- (ب) بين أن لكل  $t$  من المجال  $]0; 4[$   $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$  0.5
- (ج) استنتج أن  $F$  متصلة على اليمين في  $0$ . 0.25
- 3- أ) بين أن  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+$  واحسب  $F'(x)$  من أجل  $x > 0$  0.5
- (ب) ادرس تغيرات  $F$  على  $\mathbb{R}_+$ . 0.25