

التمرين الأول (نقطان ونصف)

يحتوي كيسر على 10 كرات بيضاء و 10 كرات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس .
نسحب عشوائيا كرة من الكيس . إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى الكيس وإذا
كانت بيضاء نضع بدلها في الكيس 3 كرات حمراء ثم نسحب كرة من الكيس .
1) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين . 0,5
2) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان بيضاوين . 0,5
3) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين . 0,5
4) أحسب الاحتمال لكي تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما بأن الكرة الثانية
المسحوبة بيضاء 1

التمرين الثاني (3 نقط)

- (1) حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة : $(E): 3x - 2y = 1$ 0,5
(2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم . 0,25
أ- بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (E) . 0,25
ب - استنتج أن العددين $14n+3$ و $21n+4$ أوليان فيما بينهما .
(3) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $2n+1$ و $21n+4$. 0,5
أ- بين أن $d = 1$ أو $d = 13$.
ب - بين أن : $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6 [13]$ 0,5
(4) من أجل كل عدد صحيح طبيعي n بحيث $n \geq 2$ نضع :
 $A = 21n^2 - 17n - 4$ و $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ 0,5
أ- بين أن العددين A و B قابلين للقسمة على $n-1$ في المجموعة \mathbb{Z} .
ب - حد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B . 0,5

التمرين الثالث (4 نقط)

- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})
ليكن a عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو: $a = \alpha + i\beta$
(1) لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2$. 0,5
أ- حدد طبيعة (H) . 0,5
ب - أنشئ (H) في الحالة : $a = 1+i$.
(2) لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق : $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$. 0,5
أ- حدد طبيعة (C) . 0,5
ب - أنشئ (C) في الحالة : $a = 1+i$.
(3) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} ، النظمة :
 $(S) : \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$
ونضع $u = z - a$

أ- بين أن النظام (S) تكافئ النظام

$$(S) : \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

0,5

ب - نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$.

0,75

حدد بدلالة r و θ ألقاق نقط تقاطع (C) و (H).

0,75

ج - استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط هي رؤوس لمثلث متساوي الأضلاع.

التمرين الرابع (10 نقط و نصف)

I - لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$f(x) = 4xe^{-x \ln 2} - 2 \quad \text{و} \quad g(x) = \frac{\ln(2x)}{x}$$

وليكن (C) و (Γ) المنحنيين الممثلين للدالتين f و g على التوالي في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j})

(الوحدة : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 4cm$)

أ- أحسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

0,5

ب - حدد الفرعين اللانهائين للمنحنى (C).

0,5

2) أ- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = 4(1 - x \ln 2)e^{-x \ln 2}$

0,5

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f .

0,25

ج - بين أن العددين 1 و 2 هما الحلين الوحيدان للمعادلة $f(x) = 0$.

0,75

3) أدرس الدالة g : النهايات، الفروع اللانهائية، التغيرات.

1

4) أرسم المنحنيين (C) و (Γ) في نفس المعلم.

1

(تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب - نأخذ : $\ln 2 = 0,7$; $e = 2,7$; $\frac{1}{\ln 2} = 1,4$; $\frac{1}{e} = 0,4$)

II - ليكن k عددا حقيقيا بحيث : $0 < k < \frac{2}{e}$.

1) أ- تحقق مبيانيا أن المعادلة $g(x) = k$ تقبل حلين مختلفين ل α و β بحيث $\frac{1}{2} < \alpha < \beta$.

0,5

ب - حدد قيمة العدد k بحيث يكون العددين α و β هما حلا المعادلة : $f(x) = 0$.

0,25

نعتبر الدالة العددية f_k المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f_k(x) = 4xe^{-kx} - 2$

2) أ- تأكد من أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f_k'(x) = 4(1 - kx)e^{-kx}$.

0,25

ب - أعط جدول تغيرات f_k .

0,5

3) أ- استنتج أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين a و b بحيث :

0,5

$$a < \frac{1}{k} < b$$

ب - بين أن : $a = \alpha$ و $b = \beta$.

1

4) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}) : \int_0^t xe^{-kx} dx = \frac{1}{k^2}(1 - kte^{-kt} - e^{-kt})$

0,5

ب- أحسب التكامل $I_k = \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x) dx$ بدلالة α و β .

0,5

ج- استنتج أن : $\ln(2\alpha) \cdot \ln(2\beta) \leq 1$.

0,75

5) بين أنه إذا كان u و v عددين حقيقيين مختلفين موجبين قطعاً بحيث : $\frac{\ln(u)}{u} = \frac{\ln(v)}{v}$

0,75

فإن $\ln(u) \cdot \ln(v) \leq 1$.

